Wiskunde D voor HAVO

Periodieke functies

Samengesteld door Gert Treurniet

Versie 2

2.1 *Inleiding*

Een toon is een trilling. De trilling van lucht brengt ons trommelvlies in beweging. De beweging van ons trommelvlies nemen we waar als geluid.

De sinus-, cosinus en tangensfuncties geven de mogelijkheid sommige trillingen te beschrijven. Verklaringen voor natuurkundige of andersoortige verschijnselen die periodiek (zich herhalend) zijn, kunnen ook worden gegeven met deze goniometrische functies.

Het stemmen van muziekinstrumenten gebeurt door te luisteren naar zweving van de gelijktijdig hoorbaar gemaakte tonen van beide instrumenten. Zweving van 2 tonen betekent dat het volume van de samengestelde toon afwisselend hoger en lager wordt. Door het optellen van goniometrische functies kan dit beter worden begrepen.

In deze module leer je:

- optellen van goniometrische functies en verklaringen geven van het resultaat daarvan en resultaten voorspellen
- werken met goniometrische formules, waaronder de ‘goniometrische stelling van Pythagoras’
- differentiëren van goniometrische functies
- het toepassen van goniometrie in praktijksituaties

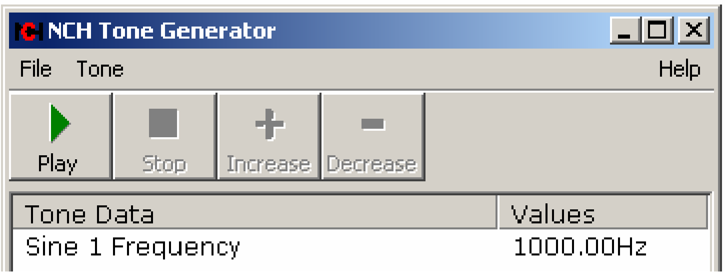
De studielast voor deze module is 20 klokuren.

2.2 *Kennismaking*

Download het programma NCH Tone Generator versie 2.01 van http://www.nch.com.au/tonegen/index.html.

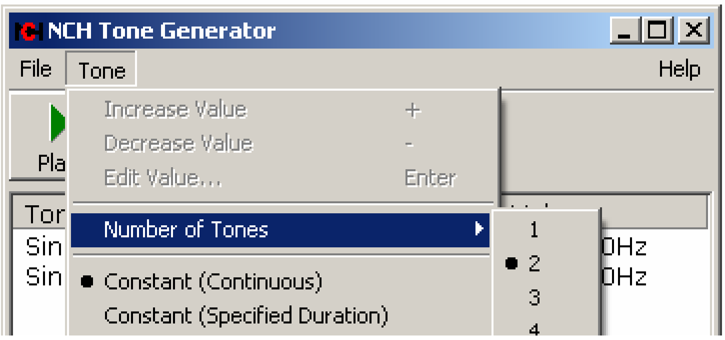
Installeer het programma.

Het programma start op met als voorbeeld een sinusvormige toon van 1000 Hz (= trillingen per seconde).



Klik op ‘play’ en luister. Stop de toon.

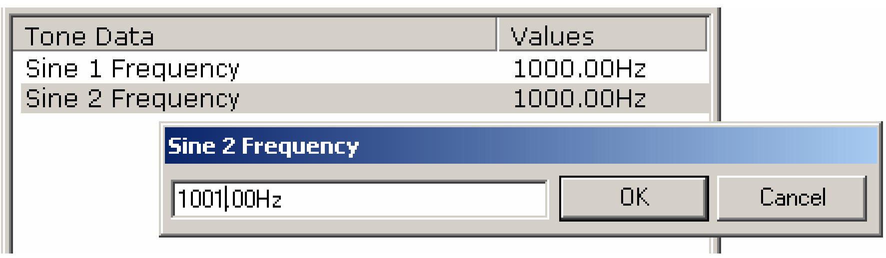
Zet het aantal tonen op 2:



Klik op ‘play’ en luister. Stop de toon.

Welk verschil hoor je met de situatie dat er maar één toon aan staat?

Dubbelklik nu op de ‘Sine 2 Frequency’. Verander nu de frequentie van de tweede sinus in 1001 Hz.



Klik op ‘play’ en luister. Stop de toon.

Welk verschil hoor je met de vorige situaties? Hoeveel keer per seconde verandert de toon?

Verander nu de frequentie van de tweede sinustoon in 1005 Hz. Laat de toon weer horen.

Hoeveel keer per seconde verandert de toon nu?

Verander de frequentie van de eerste sinustoon nu in 1004.80 Hz. Laat de toon weer horen.

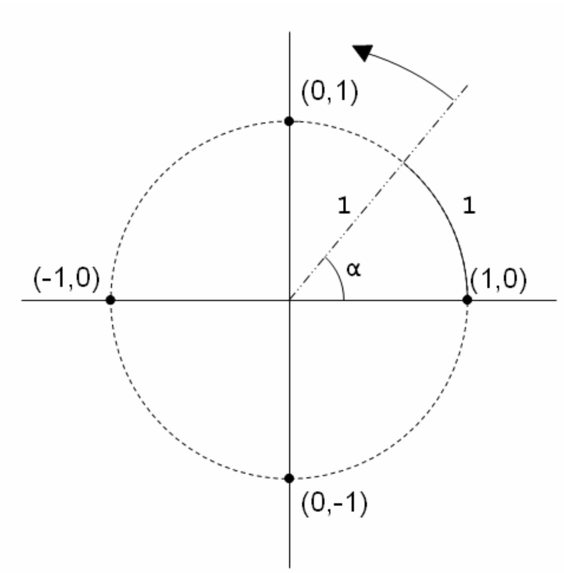
Hoeveel keer per seconde verandert de toon nu?

Wat is het verband tussen de frequenties van de tonen en je waarnemingen?

2.3 *Sinus, cosinus en tangens*

De hoekmaat die wordt gebruikt bij het werken met goniometrische functies is vaak radialen. Een van de redenen voor dit gebruik is dat differentiëren daardoor eenvoudiger wordt.

De radiaal is gedefinieerd op de manier die is aangegeven in de figuur: de hoek α is gelijk aan 1 radiaal (afgekort tot rad) als de lengte van de bijbehorende boog langs de eenheidscirkel gelijk is aan 1.



Figuur 1: De hoek α is gelijk aan 1 radiaal, want de bijbehorende boog van eenheidscirkel heeft lengte 1.

2.1 Waarom is 1 radiaal iets kleiner dan 60^o ?

De halve omtrek van de eenheidscirkel, π, komt overeen met een hoek van 180^o. Omdat dit (π radialen $\cong$ 180 dus 1 rad = $\frac{180^0}{\pi}$ en $1^0 = \frac{\pi}{180}$ rad) de vaste verhouding is tussen de hoek in radialen en de hoek in graden, kun je een verhoudingstabel gebruiken voor het omrekenen.

2.2 Maak de volgende tabel af.

Draaihoek (graden)	0	30	45		90	120		150	180
Draaihoek (radialen)	0	$\frac{1}{6}\pi$		$\frac{1}{3}\pi$			$\frac{3}{4}\pi$		π

Onthoud de volgende waarden van de sinus:

hoek (radialen)	sinus	geheugensteuntje
0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

2.3 Teken *handmatig* de functie

$$f(x) = \sin x$$

op het interval $[0, 2\pi]$. Kies op de x-as stapgrootte $\frac{1}{6}\pi$ en maak gebruik van de waarden hierboven.

2.4 a. Plot (met behulp van je rekenmachine) en schets (op papier) de grafiek van

$$f(t) = \cos 2t \text{ op het interval } [-\pi, 3\pi].$$

b. Los exact op: $\cos 2t = 0{,}5$ op het interval $[-\pi, 3\pi]$.

c. Wat is het verschil tussen de periode van $f(x) = \sin x$ en $f(t) = \cos 2t$?

De grafieken van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ hebben amplitude 1, periode 2π en evenwichtslijn $y = 0$. Ook deze grafieken kunnen worden verschoven en worden vermenigvuldigd met een factor.

Verschuiving/vermenigvuldiging van $f(x) = \sin x$	Formule
Verschuiving naar rechts over afstand c	$f(x) = \sin(x - c)$
en verschuiving naar boven over afstand d	$f(x) = \sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor a t.o.v. de x-as	$f(x) = a\sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{b}$ t.o.v. y-as	$f(x) = a\sin b(x - c) + d$

De grafiek van $f(x) = a\sin b(x - c) + d$ heet een sinusoïde (=sinusvormige).

De periode T is $\dfrac{2\pi}{b}$.

De frequentie f is $\dfrac{1}{T}$.

b heet ook wel de hoeksnelheid van een sinusoïde en is gelijk aan $2\pi f$

2.5 Geef van de volgende functies aan hoe de grafieken ontstaan uit die van $f(x) = \sin x$. Geef aan welke factor(en) en afstand(en) gebruikt zijn. Bereken ook van iedere functie de periode en de frequentie.

a. $f(x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$

b. $f(x) = \sin\frac{1}{3}(x - \frac{1}{8}\pi)$

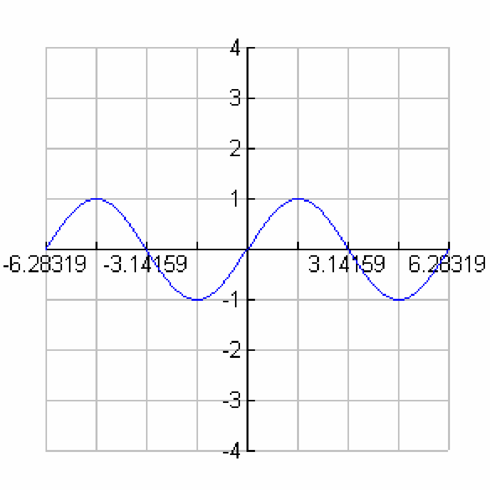
c. $f(x) = 3{,}5\sin 3x$

d. $f(x) = 0{,}3\sin(\frac{1}{3}x + 4)$

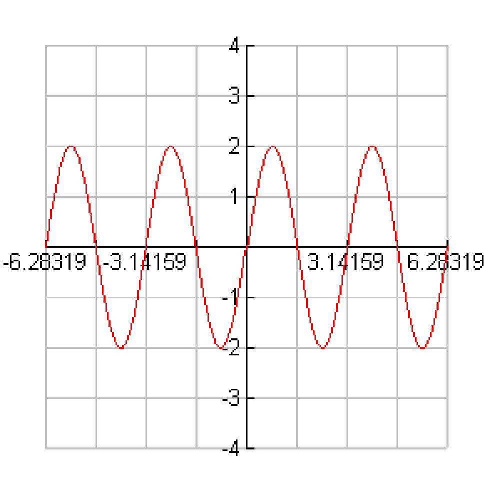
e. $f(x) = 0{,}6\sin 2\pi(x + 6) - 7$

2.6 Geef aan welke grafiek bij welke functie hoort.

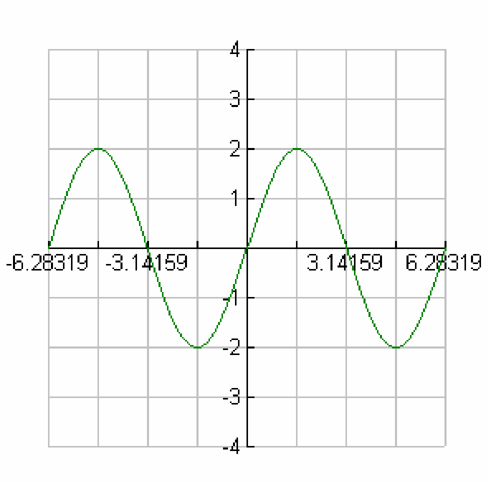
y1(x):=	sin(x)
y2(x):=	2sin(2x)
y3(x):=	2sin(x)
y4(x):=	3 sin(x-3.92)
y5(x):=	1.5cos(x)+.5



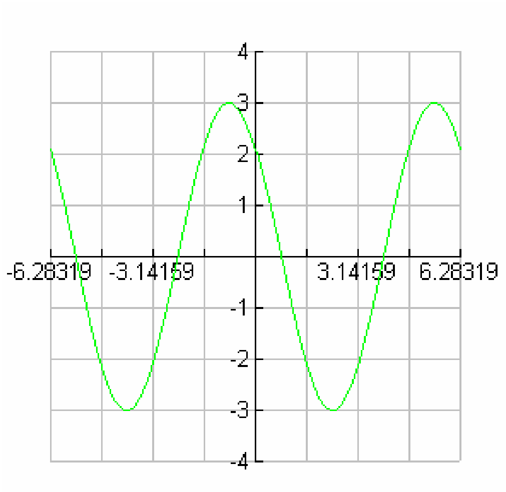
I


4
3
2
1
-6.28319
-3.14159
3.14159
6.28319
-1
-2
-3
-4

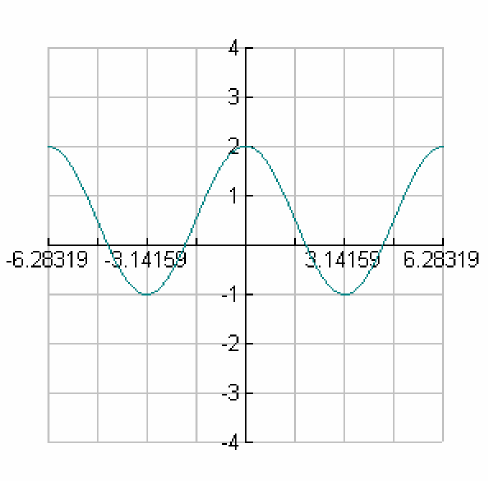
II


4
3
2
1
-6.28319
-3.14159
3.14159
6.28319
-1
-2
-3
-4

III


4
3
2
1
-6.28319
-3.14159
3.14159
6.28319
-1
-2
-3
-4

IV



V

2.7 Bekijk de functies $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

a. In welk punt is de sinusfunctie symmetrisch op dit interval?
b. In welke lijn is de cosinusfunctie symmetrisch op dit interval?
c. Wat is de periode van f en g ?

Maak gebruik van symmetrie en/of periodiciteit van f en g bij het beantwoorden van de volgende vragen.

2.8 Bereken exact met behulp van de hierboven gegeven waarden van de sinus en de co sinus:

a. $\sin 1\frac{1}{6}\pi$
b. $\cos(-1\frac{1}{4}\pi)$
c. $\sin(-5\frac{1}{3}\pi)$

2.9 Gegeven de functies $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.
Bereken alle oplossingen van de volgende vergelijkingen in 2 decimalen:

a. $f(x) = 0{,}6$
b. $g(x) = -0{,}3$

Vanwege de symmetrie van de functies $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ geldt een groot aantal formules. Enkele daarvan zijn:

$\sin(-t) = -\sin t$

$\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos(t)$

$\sin(\pi - t) = \sin t$

$\cos(-t) = \cos t$

$\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin(t)$

$\cos(\pi - t) = -\cos t$

Ga voor jezelf na op welke symmetrie bovenstaande formules zijn gebaseerd en bedenk enkele andere formules.
Deze formules kunnen worden gebruikt om andere formules om te vormen.

2.4 Sinusoïden met gelijke periode optellen

Als 2 tonen tegelijkertijd klinken, bereikt een optelling van de trillingen het oor. In dit gedeelte onderzoeken we wat de som van 2 sinusoïden met **gelijke** periode voor eigenschappen heeft.

2.10 Sinusoïden optellen op de GR
Bekijk de volgende functies van sinusoïden:

$f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$

a. Wat is de periode van *f* en *g*?
b. Plot beide functies op de GR.
c. Plot ook de som van beide functies op de GR (dit kan door de somfunctie van de GR, y1 + y2, te gebruiken).
d. Lijkt de grafiek van de som ook op een sinusoïde?

Hoewel het bovenstaande geen bewijs is, geldt toch:

Theorie, stelling

De som (van de grafieken) van 2 sinusoïden met dezelfde periode T is weer een sinusoïde met dezelfde periode T.

Werkwijze

Als de som van de 2 sinusoïden weer een sinusoïde is, moet deze dus ook in de vorm

$s(x) = a \sin b(x - c) + d$

te schrijven zijn. Hoe doe je dat?

We maken gebruik van de GR. (Het kan ook met formules, maar dat behoort niet tot de onderwijsstof.)

b is de hoeksnelheid. Deze is gelijk aan de hoeksnelheid van de 2 oorspronkelijke functies, dus b = 1.
a is de amplitude. Deze is te bepalen door de waarden van het maximum en het minimum van de somgrafiek te bepalen, deze van elkaar af te trekken en vervolgens door 2 te delen. (Waarom?)
d is de evenwichtslijn. Deze is gelijk aan de som van de *y*-waarden van de evenwichtslijnen van de oorspronkelijke functies, in dit geval dus 0. Teken deze evenwichtslijn op de GR.
c is de verschuiving naar rechts. Deze is te bepalen door langs de evenwichtslijn de afstand van de *y*-as tot de eerste positieve 0-doorgang te bepalen.

Voorbeeld

Gegeven:

$f(x) = \sin 2\pi x + 1$ en $g(x) = \sin 2\pi(x - 0{,}25) - 2$

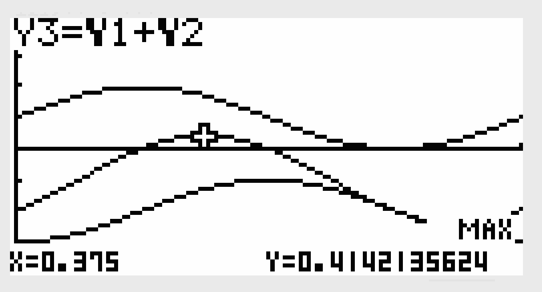
Wat is de formule van $s(x) = f(x) + g(x)$?

Antwoord:

$b_s = b_f = 2\pi$

$T = \dfrac{2\pi}{b_s} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

Plot de som van de beide functies op de GR.



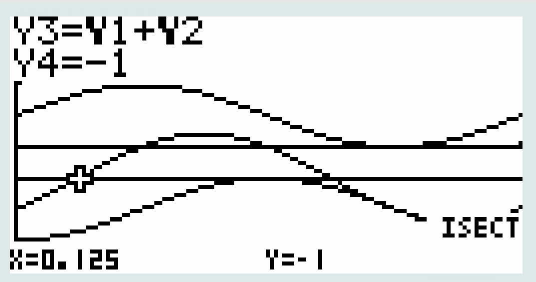
Bepaal met G-Solve de waarden van het maximum en het minimum:

$s_{\min} \approx$ 0,414 en $s_{\max} \approx$ -2,414

De amplitude a is dus gelijk aan $\dfrac{0{,}414 - (-2{,}414)}{2} = 1{,}414$

$d_s = d_f + d_g = 1 + (-2) = -1$

c kan worden berekend door de x-coördinaat van het snijpunt van s met zijn evenwichtslijn te bepalen, waarbij s de evenwichtlijn in opwaartse richting moet snijden. Zie het voorbeeld hierna. In dit geval geldt dus: $c = 0{,}125$



Er geldt dus: $s(x) = 1{,}414\sin(2\pi(x - 0{,}125)) - 1$

2.11 Sinusoïden optellen op de GR

Gegeven de functies $f(x) = \sin 4x + 0{,}25$ en $g(x) = \sin 4(x-3) - 2$. Schrijf de som van deze 2 functies als een sinusoïde.

2.5 *Sinusoïden met ongelijke perioden optellen*

Als 2 tonen met ongelijke frequentie klinken, bereikt de som van deze 2 tonen het oor. In dit gedeelte onderzoeken we wat de som van 2 sinusoiden met <u>ongelijke</u> frequentie voor eigenschappen heeft.

2.12 Bekijk de volgende functies van sinusoïden: $f(t) = \sin \pi t$ en $g(t) = \sin \frac{2}{3} \pi t$

a. Wat is de periode van $f(t)$?
b. Wat is de periode van $g(t)$?
c. Plot beide functies.
d. Plot ook de som van beide functies $s(t)$.
e. Lijkt de grafiek van de som ook op een sinusoïde?
f. Wat is de periode van $s(t)$?
g. Wat zou het verband kunnen zijn tussen de periodes van $f(t)$ en $g(t)$ en de periode van $s(t)$?

2.13 Voer de opdrachten van de vorige opgave ook uit voor de volgende functies.
$k(t) = \sin \frac{1}{2} \pi t$ en $l(t) = \sin \frac{1}{3} \pi t$

Klopt de periode van de somfunctie met het verband dat je bij de vorige vraag had gevonden? Zo niet, waarom niet? Hoe zou het verband dan wel zijn?

Hoewel het bovenstaande geen bewijs is, geldt de volgende theorie met betrekking tot de optelling van 2 sinusoïden met ongelijke periode:

De optelling (van de grafieken) van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 is <u>geen sinusoïde</u>. Je kunt deze som dus niet schrijven in de vorm $f(x) = a \sin b(x-c) + d$.
De som van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 <u>kan periodiek zijn</u>.

Bij deze theorie moet worden opgemerkt dat bij functies die geen sinusoïde zijn meestal niet gesproken wordt over een evenwichtslijn en een amplitude.

De werkwijze voor het bepalen van de periode van de som van 2 sinusoïden met ongelijke periode is als volgt:

Gegeven:
$T_1 = 6\pi$ en $T_2 = 8\pi$
Schrijf een aantal veelvouden van 6π op: 6π, 12π, 18π, 24π, 30π, 36π
Schrijf ook een aantal veelvouden van 8π op: 16π, 24π, 32π, 40π
Het eerste getal dat in beide rijen voorkomt is de periode van de somfunctie. In dit geval is dat dus 24π

2.14 Bepaal de gemeenschappelijke periode van de volgende functies:
$f(x) = \sin 4\pi x + 0{,}25$ en $g(x) = \sin 4\pi(x-3) - 2$
$f(x) = \sin \frac{1}{4} \pi x - \frac{3}{4}$ en $g(x) = \sin \frac{1}{2} \pi (x - 2\pi) - 2$

$f(x) = \sin \tfrac{1}{5}\pi x + 0{,}25$ en $g(x) = \sin \tfrac{1}{7}(3 - \pi x) - 2$
$f(x) = \sin \tfrac{1}{12}\pi x + 0{,}25$ en $g(x) = \sin \tfrac{1}{10}\pi(x - 3) - 2$

2.5.1 Verdieping

2.15 a. Hoe kun je met een berekening de 'gemeenschappelijke periode van de som van 2 periodieke functies' bepalen?
b. Wanneer is er geen gemeenschappelijke periode? Geef een voorbeeld.

Voor het optellen van sinusoïden gelden de volgende formules:

$$\sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}$$

$$\cos t + \cos u = 2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

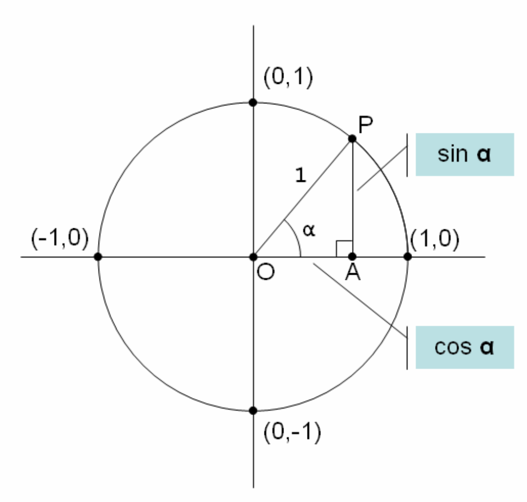
$$\cos t - \cos u = -2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

Opmerking: met deze formules kan de som van 2 sinusoïden worden omgezet in een product van 2 sinusoïden, en andersom!

c. Leg uit hoe je aan deze formules kunt zien, waarom de som van 2 sinusoïden met dezelfde frequentie weer een sinusoïde is en waarom de som van 2 sinusoïden met ongelijke frequentie geen sinusoïde is.

2.6 *Sinus, cosinus en tangens in de eenheidscirkel*

Er zijn nog meer verbanden tussen de sinusfunctie en de cosinusfunctie. Hier leren we er nog een aantal te gebruiken. In de figuur hieronder is de eenheidscirkel getekend.



Figuur: Sinus en cosinus in de eenheidscirkel.

Op de eenheidscirkel ligt een punt P. Vanuit het middelpunt O van de eenheidscirkel is de straal naar P getekend. Verder is punt A getekend, met *x*-coördinaat gelijk aan die van P. Hoek A is dus een rechte hoek. Ook is aangegeven waar in de figuur de sinus en cosinus van de hoek α te zien zijn.

2.16 Bekijk nu ΔOAP .

a. Welke bekende stelling kun je in deze driehoek toepassen?
b. Pas de stelling toe met $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$. Welk verband tussen $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ krijg je nu?
c. Geldt dit verband ook als P in een ander kwadrant ligt?

Stelling

Een gevolg van de definitie van sinus en cosinus is dat daartussen het volgende verband bestaat:

$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Opmerking:

Vaak wordt $(\sin\alpha)^2$ geschreven als en $\sin^2\alpha$. Dat is <u>niet</u> hetzelfde als $\sin 2\alpha$.

2.17 Schrijf de volgende functies zo om, dat er geen $\cos x$ meer in voorkomt:

a. $f(x) = 3\sin^2 x + \cos^2 x - 5$
b. $g(x) = 4\sin^2 x - 3\cos^2 x - 5$
c. $h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
d. $i(x) = \cos x$

2.18 Werk de haakjes weg en/of vereenvoudig:

a. $s(\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

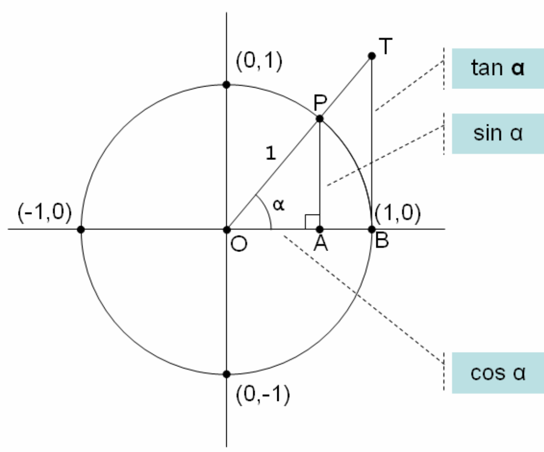
b. $\tan'(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$

2.19 Los de volgende vergelijkingen exact op, op het interval $[-\pi, 3\pi]$:

a. $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 1,25$

b. $\cos^3 x + \cos x \sin^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Hieronder is nog een keer de eenheidscirkel getekend, nu uitgebreid met een extra driehoek ΔOBT. Deze driehoek is gelijkvormig met ΔOAP. Leg dit uit.



Voor deze gelijkvormigheid geldt de volgende verhoudingstabel:

OA (= cos α)	AP (= sin α)
OB (= 1)	BT (= tan α)

Met het kruisproduct volgt dan:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Hiermee is de mogelijkheid ontstaan om een tangens functie te vervangen door het quotiënt van sinus en cosinus. Ook deze regel kan gebruikt worden om formules om te schrijven.

c. Teken de grafiek van $f(x) = \tan x$. Wat is de periode van $f(x)$?

d. Los op zonder gebruik van de GR: $\tan x = 0$.

e. Verklaar uit de relatie tussen tangens, sinus en cosinus waarom de grafiek van de tangens verticale asymptoten heeft.

2.7 Goniometrische functies differentiëren

Dit gedeelte moet nog worden afgestemd met het gedeelte over differentiëren.

Bij bewegingen is vaak de snelheid van belang. Snelheid is de afgeleide van de positie. Bij sinusvormige bewegingen is de afgeleide van de sinus dus van belang. In deze module gaan we werken met de afgeleiden van goniometrische functies.

2.20 Gegeven de functie $f(x) = \sin x$.

a. Plot deze functie op het interval $[-\pi, 3\pi]$.
b. Plot ook de afgeleide functie.
c. Wat zal het functievoorschrift van deze afgeleide functie zijn?

Gegeven de functie $g(x) = \cos x$

d. Plot deze functie op het interval $[-\pi, 3\pi]$.
e. Plot ook de afgeleide functie.
f. Wat zal het functievoorschrift van deze afgeleide functie zijn?
g. Hoe vaak moet je $f(x)$ differentiëren om $f(x)$ weer te krijgen?

De afgeleide van $f(x) = \sin x$ is $f'(x) = \cos x$
De afgeleide van $g(x) = \cos x$ is $g'(x) = -\sin x$

2.21 Bepaal de afgeleiden van de volgende functies (denk aan de kettingregel):

a. $f(t) = 2\sin t$
b. $g(t) = \sin 3t$
c. $h(t) = 2\cos 3\pi t$
d. $i(t) = 2\cos 3\pi(t+2)$
e. $j(t) = 2\sin 3\pi(t+2) + 7$

2.22 Differentieer en vereenvoudig waar mogelijk:

a. $l(t) = 5\sin 2t \cdot \cos 3t$
b. $\tan(t)$
c. $k(t) = 5\sin(t^2 + 3t + 2)$
d. $m(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
e. $s(t) = a\sin(b(t-c)) + d$

2.23 Geef aan waar de extremen van de volgende functie liggen. Bepaal ook de waarde van het extreem. Doe dit met behulp van differentiëren:

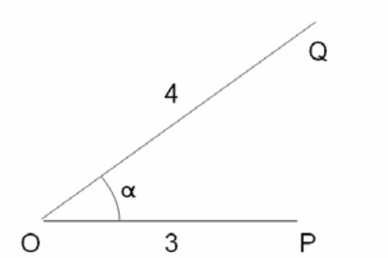
$f(x) = \sin x$ op het interval $[0, 2\pi]$

2.8 *Integratie met andere onderwerpen*

In dit hoofdstuk vind je oefeningen die een ook beroep doen op je kennis van de stof van wiskunde B.

2.24 Goniometrische functies en oppervlakte I

Twee staven met lengte 4 dm en 3 dm kunnen draaien om een punt O.



Als de eindpunten P en Q van de staven worden verbonden, ontstaat driehoek ΔOPQ. De oppervlakte van die driehoek is afhankelijk van de hoek α tussen *OP* en *OQ*.

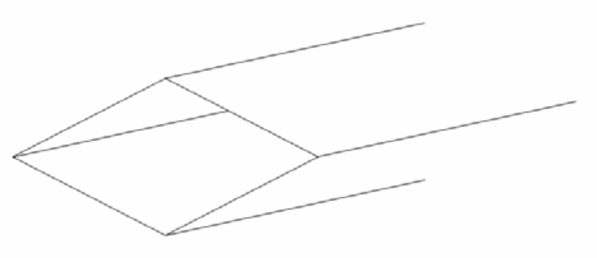
a. Voor welke hoeken α is de oppervlakte van ΔOPQ gelijk aan nul?

b. Toon aan dat geldt dat het oppervlak van ΔOPQ gelijk is aan $6\sin\alpha$.

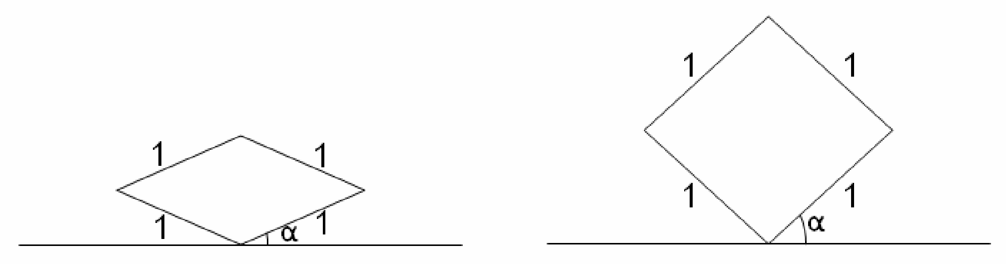
c. Welke vorm heeft ΔOPQ als de oppervlakte van deze driehoek maximaal is?

2.25 Goniometrische functies en oppervlakte II

Een buis heeft een loodrechte doorsnede in de vorm van een ruit.



De buis kan worden ingedrukt en samengetrokken, waardoor het vooraanzicht verandert.



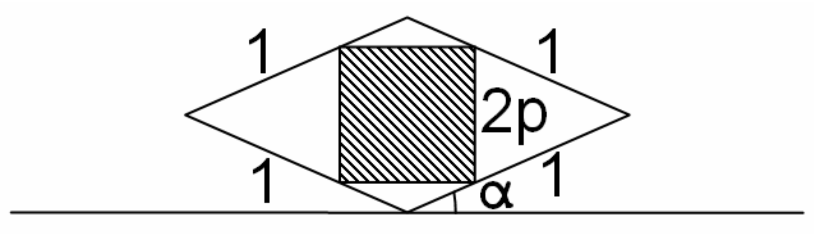
Daardoor verandert de oppervlakte van de doorsnede van de buis en ook de doorstromingscapaciteit.

Metingen hebben de volgende tabel voor de oppervlakte van de doorsnede, afhankelijk van α opgeleverd:

α	oppervlakte
20°	0,64
40°	0,98
60°	0,87
80°	0,34

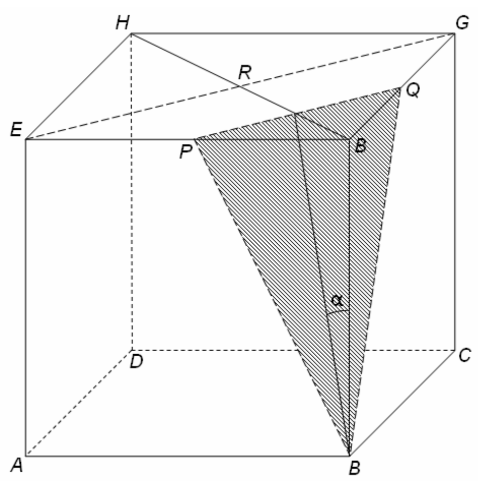
a. Controleer de waarde van het oppervlak voor α = 20°.
b. Druk de oppervlakte van de doorsnede uit in α
c. Bereken voor welke α de oppervlakte maximaal is.

In de buis wordt een vierkante balk gestoken. De buis wordt samengedrukt tot de balk precies past. Stel de zijde van het vierkant is $2p$.



d. Bewijs: $p = \dfrac{\sin\alpha}{1+\tan\alpha}$.
e. Bewijs: $\dfrac{dp}{d\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha)^3 - (\sin\alpha)^3}{(\cos\alpha)^2(1+\tan\alpha)^2}$
f. Voor welke α tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt $\dfrac{dp}{d\alpha} = 0$?
g. Verklaar het antwoord op de vorige vraag meetkundig.

2.26 Goniometrische functies en oppervlakte III
Gegeven de kubus ABCD.EFGH met ribben 1.
Vlak V gaat door B en is evenwijdig met diagonaal EG.
Vlak V draait zo, dat de hoek x (in radialen) van dat vlak met de ribbe BF (zie figuur) verandert. Bij die draaiing blijft het vlak evenwijdig met EG.



a. Er worden alleen standen toegelaten waarbij het vlak de kubus volgens een driehoek BPQ snijdt. Welke waarden kan α aannemen?
b. Voor welke x is driehoek BPQ gelijkzijdig?
c. De oppervlakte van driehoek BPQ is afhankelijk van α. Toon aan dat geldt dat de oppervlakte van deze driehoek gelijk is aan: $\dfrac{\sin\alpha}{1-(\sin\alpha)^2}$.
d. Stel $\sin a = s$ en $y = \dfrac{s}{1-s^2}$. Welke waarden kan s aannemen?
e. Bereken $\dfrac{dy}{ds}$.
f. Hoe kun je in de ruimtefiguur zien dat $\dfrac{dy}{ds}$ positief moet zijn voor iedere toegestane waarde van s?

2.9 *Samenvatting en terugblik*

De halve omtrek van een cirkel, π, komt overeen met een hoek van 180°. Omdat dit de vaste verhouding is tussen de hoek in radialen en de hoek in graden, kun je een verhoudingstabel gebruiken voor het omrekenen.

hoek (radialen)	sinus
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1

Verschuiving/vermenigvuldiging van $f(x) = \sin x$	Formule
Verschuiving naar rechts over afstand c	$f(x) = \sin(x - c)$
en verschuiving naar boven over afstand d	$f(x) = \sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor a t.o.v. de x-as	$f(x) = a\sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{b}$ t.o.v. y-as	$f(x) = a\sin b(x - c) + d$

De grafiek van $f(x) = a\sin b(x - c) + d$ heet een sinusoïde (=sinusvormige).

De periode T is $\dfrac{2\pi}{b}$.

De frequentie f is $\dfrac{1}{T}$.

b heet ook wel de hoeksnelheid van een sinusoïde en is gelijk aan $2\pi f$

Enkele formules waarmee je sinus in cosinus kunt omzetten en omgekeerd zijn:

$\sin(x) = -\sin(-x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(\mathrm{x}) = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

$\cos(\mathrm{x}) = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

De som (van de grafieken) van 2 sinusoïden met dezelfde periode T is weer een sinusoïde met dezelfde periode T.

De optelling (van de grafieken) van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 is geen sinusoïde.
Je kunt deze som dus niet schrijven in de vorm $f(x) = a\sin b(x - c) + d$.

De som van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 kan periodiek zijn. Als die periode bestaat, kun je die vinden door de kleinste gemeenschappelijke periode te zoeken die een veelvoud is van beide periodes.

De afgeleide van $f(x) = \sin x$ is $f'(x) = \cos x$
De afgeleide van $g(x) = \cos x$ is $g'(x) = -\sin x$

Uiteraard kunnen de bekende regels voor differentiëren ook worden toegepast met deze goniometrische functies.

2.10 *Praktijk: Toepassingen*

Wat kun je in de praktijk met goniometrische formules en periodieke functies?

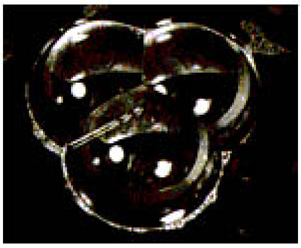
2.27 Intro-opgave met optellen op audio-gebied
Gegeven de 2 volgende functies:
$g(t) = \sin(10\pi t)$ en $h(t) = \sin(12\pi t)$ met t in seconden.

a. Wat zijn de frequenties van $g(t)$ en $h(t)$?
b. Geef ook de eenheid van deze frequentie.
c. Wat is de periode van g?
d. Plot de beide grafieken over een interval van ongeveer 3 periodes.
e. Plot de somgrafiek op een interval van 4 seconden.
f. Leg aan de hand van de plot uit wat je zou horen als je de volgende signalen gelijktijdig hoorbaar zou maken:

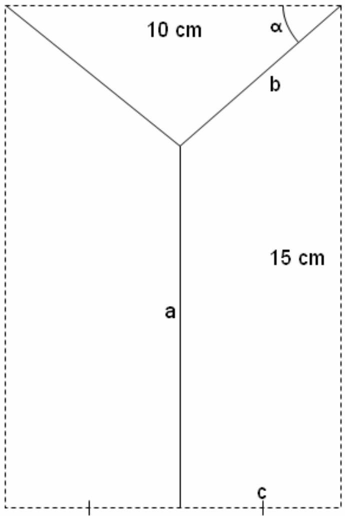
$i(t) = \sin(2\pi 1000t)$ en $j(t) = \sin(2\pi 1002t)$ met t in seconden.

2.28 Voer het laatste gedeelte van de kennismakingsopgave nu nog eens uit.

2.29 Zeepbellen:
Als meerdere zeepbellen tegen elkaar aan komen, worden de grensvlakken ertussen vaak vlak. Hier zie je een plaatje van 3 zeepbellen waar dat is gebeurd. De hoek tussen de vlakken blijkt vaak, maar niet altijd, 120° te zijn.



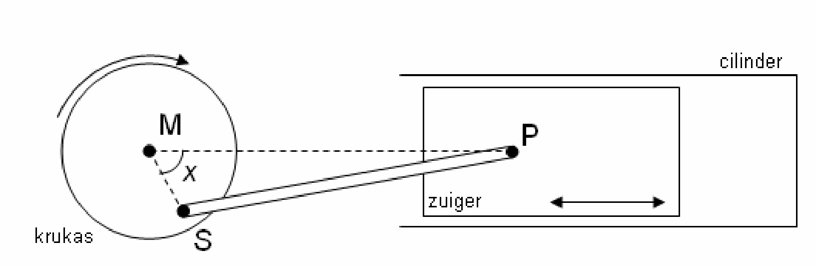
We gaan voor een vereenvoudigde situatie na of het daar ook het geval is.
Bekijk de onderstaande situatie waarin een rechthoek van 10 bij 15 cm is getekend. Veronderstel dat er tussen de hoekpunten van de korte zijde en het midden van de korte zijde er tegenover 3 draadjes zijn aangebracht, die door een knoopje aan elkaar zijn gemaakt. We gaan na bij welke hoek α de totale lengte van de touwtjes minimaal is.



a. Wat is de lengte van het touw, uitgedrukt in a en b?
b. Wat is b uitgedrukt in α?
c. Wat is a uitgedrukt in c?
d. Wat is c uitgedrukt in α?
e. Wat is dus de lengte van het touw uitgedrukt in α?
f. Bij welke α is de lengte minimaal?
g. Hoe groot zijn dan de hoeken tussen de touwtjes?

2.30 Krukas en cilinder

Een zuiger is door middel van een drijfstang verbonden met een draaiende schijf. Als de schijf draait beweegt de zuiger horizontaal heen en weer.



M is het middelpunt van de schijf, *S* is het (scharnierende) verbindingspunt van de drijfstang en de schijf. Bij punt *P* is de drijfstang ook scharnierend met de zuiger verbonden. *MS = 1* en *PS = 4.*
Stel de grootte van de hoek *PMS* is *x* radialen.
De afstand *PM* is afhankelijk van de hoekgrootte *x*; stel *PM = a(x).*

Voor iedere hoekgrootte x geldt: $a(x) = \cos x + \sqrt{16 - (\sin x)^2}$.

a. Bewijs deze formule voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

In de figuur hieronder staat de grafiek van *a* als functie van *x*, voor $0 \le x \le 2\pi$.

In de grafiek zie je dat het minimum van *a(x)* gelijk is aan 3 en het maximum gelijk is aan 5.

b. Hoe kun je dat beredeneren aan de hand van het plaatje met de zuiger en de drijfstang?

Bij één rondgang van de schijf zal de lengte PM op twee momenten gelijk zijn aan de lengte van de drijfstang *PS*.

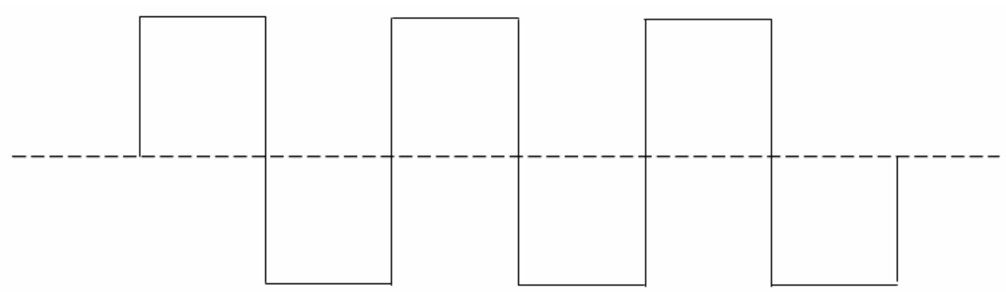
c. Hoe groot zijn de hoeken *PMS* waarbij zich dat voordoet? Geef je antwoord in radialen en in één decimaal nauwkeurig.

De afstand *a(x)* kan benaderd worden door de formule: $b(x) = 4 + \cos x$.

d. Onderzoek met de GR voor welke *x* het verschil tussen *b(x)* en *a(x)* maximaal is en bereken dat verschil in 2 decimalen nauwkeurig.

2.31 Periodieke functies kunnen worden geschreven als som van verschillende sinusoïden. Fourier heeft zich hier uitgebreid mee bezig gehouden.

Een voorbeeld van een periodieke functie is een blokgolf:



Deze periodieke functie kan worden geschreven als:
$f(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \frac{1}{9}\sin 9t + ...$

Je kunt deze formule plotten op je GR, met VU-Grafiek, met TI-Interactive of met TI-Inspire. Maar er is ook een site met een applet:
http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/fourier/fourier.html#fourier

Een scherm van deze site zie je hier:

Onder staan allemaal schuifbalken. Aan de linkerzijde staan de schuifbalken voor de amplitudes van *cos bt* en aan de rechterzijde die van *sin bt*. *b* vind je onder de schuifbalken, de amplitude staat er tussen.

Ga na dat de formule voor de blokgolf op het plaatje hierboven is weergegeven.

Experimenteer nu zelf met andere golfvormen.